

THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 10

Exercice 1. *À faire après chaque cours!*

Revoir le cours et comprendre/remplir les lacunes dans les démonstrations.

Exercice 2. (Moyen) *Sous-groupes d'indice premier*

Soit G un groupe fini avec un sous-groupe $H \leq G$ d'indice premier p , et supposons que p est le plus petit facteur premier de $|G|$. Montrez que H est normal dans G .

Indice : Considérez l'action $G \curvearrowright G/H$ et montrez que $\ker(G \rightarrow S_p) = H$ en prouvant que les deux sous-groupes ont le même indice.

Exercice 3. (Moyen)

- (1) Soit p un nombre premier. Montrez qu'un groupe d'ordre p^n est simple si et seulement si $n = 1$.
- (2) Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrez qu'un groupe d'ordre pq ne peut pas être simple.
- (3) Soient p et q deux nombres premiers distincts, montrez qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre p^2q .
- (4) Soient p , q et r trois nombres premiers distincts, montrez qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre pqr .

Exercice 4. (Moyen) Considérons le célèbre résultat suivant connu sous le nom de Théorème de Burnside :

Théorème : Soient p et q des nombres premiers, alors tout groupe d'ordre $p^a q^b$ est résoluble.

En supposant le théorème de Burnside, démontrez que les groupes non abéliens d'ordre strictement inférieur à 60 ne peuvent pas être simples.

Exercice 5. (Difficile) Soit $n \geq 2$. Montrez qu'un groupe d'ordre $2^n \cdot 3$ possède un sous-groupe normal propre non trivial.

Exercice 6. (Difficile)

- (1) Soit L un groupe cyclique fini, K un groupe, et $\varphi_1, \varphi_2 : L \rightarrow \text{Aut}(K)$ deux actions de groupe. Montrez que si $\varphi_1(L)$ et $\varphi_2(L)$ sont des sous-groupes conjugués de $\text{Aut}(K)$, alors les deux produits semi-directs induits sont isomorphes

$$K \rtimes_{\varphi_1} L \cong K \rtimes_{\varphi_2} L.$$

Indice : Soit $\sigma \in \text{Aut}(K)$ tel que $\sigma\varphi_1(L)\sigma^{-1} = \varphi_2(L)$. Vous pouvez trouver $a \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma \circ \varphi_1(l) \circ \sigma^{-1} = \varphi_2(l)^a$ pour tout $l \in L$. Définissez $K \rtimes_{\varphi_1} L \rightarrow K \rtimes_{\varphi_2} L$ par $(k, l) \mapsto (\sigma(k), l^a)$.

- (2) Montrez qu'il existe un unique (à isomorphisme près) produit semi-direct non trivial de la forme $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Indice : Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ est cyclique (vous n'avez pas besoin de le démontrer).

- (3) Montrez qu'il existe un unique (à isomorphisme près) produit semi-direct non trivial de la forme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Indice : Montrez que tout automorphisme de K est L -linéaire, puis utilisez les théorèmes de Sylow.